14-ЛЕКЦИЯ. Шешімнің орнықтылығы

Лекция мақсаты: Орнықтылықтың Ляпунов мағынасымен таныстыру. Оның геометриялық мән-мағынасын таныстыру. Зерттеу әдістерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: асимптотикалық орнықтылық, Ляпунов функциясы, анықталған оң таңбалы, теріс таңбалы функциялар.
Қысқаша мазмұны
Шешімнің орнықтылығы

2.1. Автономды теңдеулердің қалыпты жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

Мұндағы $f(x)$ векторы кейбір $D \subset R^n$ облысында анықталған және үздіксіз дифференциалданатын функция деп есептелінеді.

Айталық, a -нүктесі (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын:

$$f(a) = 0 \tag{2}$$

ал $x = \varphi(t, x^0)$ функциясы жүйенің бастапқы

$$\varphi(0, x^0) = x^0 \tag{3}$$

шартын қанағаттандыратыг шешім болсын.

Анықтама-1. Жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x = a$ Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер:

1) кез келген $\delta_0 > 0$ саны үшін $\|x^0 - a\| < \delta_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x = \varphi(t, x^0)$ шешім t -ның барлық оң мәндерінде анықталса,

2) кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\|x^0 - a\| \le \delta$ теңсіздігінен $\|\varphi(t, x^0) - a\| \le \varepsilon, \forall t \ge 0$ теңсіздігі шықса.

Анықтама-2. Теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты деп аталынады, егер ол Ляпунов бойынша орнықты болса және қосымша

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x^0) = a$$

шарты орындалса.

Анықтама-3. Теңбе-теңдік қалып Ляпунов бойынша орнықсыз деп аталынады, егер қаншалықты кіші $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылмасын, $\left\| x^0 - a \right\| \le \delta$ теңсіздігінен $\left\| \varphi(t, x^0) - a \right\| \le \varepsilon$ теңсіздігі шықпаса.

2.2. Бұл анықтамалардың бәріне геометриялық түсініктеме беруге болады.

Алдын ала ескерте кететін жағдай: теңбе-теңдік $x = a$ қалпы үшін координат жүйесінің бас нүктесін алуға болады, яғни $a = 0$ деп алуға болады (ол үшін параллельдік көшіру жасасақ, жеткілікті).

Бұл жағдайда орнықтылықты қысқаша анықтауға болады: теңбе-теңдік $x = 0$ қалпы Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін кейбір $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, мынандай теңсіздіктер орындалса:

$$\left\| x^0 \right\| \le \delta \Rightarrow \left\| \varphi(t, x^0) \right\| \le \varepsilon, \forall t \ge 0 \tag{4}$$

Ал асимптотикалық орнықты болу үшін қосымша

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x^0) = 0 \tag{5}$$

шарты орындалуы керек.

Соңғы теңсіздіктерге төмендегідей геометриялық түсініктеме беруге болады.

Фазалық R_x^n кеңістігінде центрлері координат жүйесінің басында жатқан радиустері сәйкес δ және ε сандарына тең центрлес сфералар жүргізейік. Бұлардың радиустері әртүрлі қатынаста болуы мүмкін. Айқын болуы үшін $\delta < \varepsilon$ болсын. Сонда орнықты дегеніміз – радиусы δ-ға тең сфераның ішінен басталған траектория радиусы ε-ге тең сфераның ішінен шықпайды дегенді білдіреді. Ал асимптотикалық орнықты дегеніміз – радиусы сол δ-ға тең сфераның ішінен басталған траектория t-ның мәні өскен сайын координат жүйесінің бас нүктесіне шексіз жақындайды дегенді білдіреді. Орнықсыздық дегеніміз – қаншалықты кіші мәнді $\delta > 0$ саны табылмасын, кіші сфераның ішінен басталған траектория белгілі бір мезеттен бастап үлкен сфераның сыртына шығады дегенді білдіреді.

Сызықты жүйенің орнықтылығы

4.1. n теңдеуден тұратын тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

Бұл жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x = 0$ нүктесінің орнықтылық, орнықсыздық шарттарын келтірейік.

Теорема-1. Егер A матрицасының барлық меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты, ал егер сол меншікті сандардың ең болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - сандары A матрицасының меншікті сандары болсын және $\operatorname{Re}\lambda_i \le -\alpha < 0, (i = 1, ..., n)$. Бұл жағдайда Ляпунов функциясын құру үшін A матрицасын алдын ала диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Алгебрадан белгілі, A матрицасы үшін кейбір T матрицасын табуға болады және ол мынандай теңдікті қанағаттандырады:

$$T^{-1}AT = \Lambda + B_\varepsilon$$

Мұнда $\Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, ал $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі $\left| b_{ij} \right| \le \varepsilon, (i, j = 1, ..., n)$ шартын қанағаттандырады.

(1) жүйе үшін $x = Ty$ алмастыруын қолдансақ,

$$\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda + B_\varepsilon\right) y \tag{2}$$

жүйесіне келеміз. Осы жүйеге Ляпунов функциясын төмендегідей түрде алайық:

$$V(y)=\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2=(y,\bar{y}) \tag{3}$$

Бұл функция $x=0$ нүктесінің (немесе $y=0$ нүктесінің) кез келген аймағында анықталған оң таңбалы. Енді оның туындысын есептейік:

$$\dot{V}(y)=\frac{d}{dt}(y,\bar{y})=(\frac{dy}{dt},\bar{y})+(y,\frac{d\bar{y}}{dt})=$$
$$\left(\left(\Lambda+\bar{\Lambda}\right)y,\bar{y}\right)+\left[\left(B_\varepsilon y,\bar{y}\right)+(y,B_\varepsilon\bar{y})\right]$$

Осындағы бірінші қосындыны бағаласақ,

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\bar{\lambda_i})\left|y_i\right|^2=2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,\lambda_i\left|y_i\right|^2\le-2\alpha\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2$$

теңсіздігін аламыз. Екінші қосындыны бағалайық:

$$\left\|\left(B_\varepsilon y,\bar{y}\right)\right\|=\left\|\left(y,B_\varepsilon\bar{y}\right)\right\|\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|\left|y_i\right|\left|y_j\right|\le\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\left|y_i\right|\left|y_j\right|=\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|\right)^2\le n\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2$$ Осыдан

$$\dot{V}(y)\le-2(\alpha-n\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2=-2(\alpha-n\varepsilon)V(y) \tag{4}$$

Соңғы қатынастағы ε санын $0<\varepsilon<\dfrac{\alpha}{n}$ теңсіздігі орындалатындай етіп алсақ, онда $\dot{V}(y)$ функциясының анықталған теріс таңбалы болатынын көреміз. Сондықтан, Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты.

Теореманың екінші бөлігіне келетін болсақ, кейбір λ_{i_0} меншікті санның нақты бөлігі оң болсын: $\mathrm{Re}\,\lambda_{i_0}>0$. Бұл санға сәйкес шешім

$$x(t)=e^{\lambda_{i_0}t}f \tag{5}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f - сәйкес меншікті вектор. Осыдан

$$\left\|x(t)\right\|=e^{\alpha t}\left\|f\right\|,\ \alpha=\mathrm{Re}\,\lambda_{i_0} \tag{6}$$

$\alpha>0$ болғандықтан, t шексіздікке ұмтылғанда $\left\|x(t)\right\|$ нөлге ұмтылмайды, яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-1. Егер A матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да болуы мүмкін. Егер таза жорамал санға сәйкес жордан шаршысының реті бірден аспаса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты. Кері жағдайда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Мысалы, λ_1 меншікті саны таза жорамал сан болса, ал оған екінші ретті жордан шаршысы сәйкес келсе, онда шешім

$$x(t)=e^{\lambda_1 t}(f+tg) \tag{7}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f,g - тұрақты меншікті векторлар. Осыдан

$$\left\|x(t)\right\|=\left\|f+tg\right\|\ge t\left\|g\right\|-\left\|f\right\|\to\infty \text{ егер } t\to\infty,$$

яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-2. Жоғарыда айтылған тұжырымдарды (1) жүйенің айқын шешімін пайдаланып дәлелдеуге де болады. Ол шешім былай жазылады:

$$x(t,x^0)=e^{tA}x^0 \tag{8}$$

Мұнда тек e^{tA} матрицасының түрін анықтау керек. Жоғарғы әдістің бір артықшылығы – оны сызықты емес жүйеге де қолдануға болатындығы.

Соңғы екі тұжырымның дәлелдеулерін [4] оқу құралынан көруге болады.

Сызықты жуықтау арқылы орнықтылықты зерттеу

5.1. Айталық, $x=0$ нүктесі автономды

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (1)$$

жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын, яғни $f(0) = 0$. Осы $x = 0$ нүктесінің кейбір U аймағында $f(x)$ функциясы екінші ретке дейін үздіксіз дифференциалдансын. Тейлор формуласы бойынша:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + g(x) \qquad (2)$$

Мұнда $f(0) = 0$, $f'(0)$ - Якоби матрицасы, оның әрбір элементі $\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}, (i, k = 1...., n)$, түрінде анықталады. Ал $g(x)$ функциясы үшін

$$\|g(x)\| \le C\|x\|^2, \ x \in U \qquad (3)$$

шарты орындалады. Сондықтан, жуықтап, $f(x) \approx f'(0)x$ деп алуға болады. Егер $\left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right) = A$ деп белгілесек, төмендегідей сызықты жүйе аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (4)$$

Сызықты емес (1) жүйеден (4) жүйеге көшуді жүйені сызықтандыру деп атайды. Ол белгілі бір шешімнің аймағында орындалады.

Сызықтандырылған (4) жүйе – тұрақты коэффициентті сызықты жүйе. Ол оңай интегралданады. Сондықтан, оның $x = 0$ теңбе-теңдік қалпының орнықтылығы толық зерттелген. Оны өткен параграфта келтірдік.

Енді осы сызықтандырылған (4) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығына қарап бастапқы сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығын анықтау мүмкіншілігін қарастырайық. Бұл жөнінде Ляпуновтың іргелі тұжырымы төмендегідей.

Теорема-1. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты және кез келген шешім үшін төмендегідей шарт орындалады:

$$\left\|x(t, x^0)\right\| \le Ce^{-\alpha t}\left\|x^0\right\|, \ \forall t \in [0, \infty) \qquad (5)$$

мұнда $\alpha > 0, C > 0, x^0$ -мейлінше аз шама.

Дәлелдеуі. Берілген (1) жүйені (2) жіктеуді пайдаланып төмендегідей түрде жазайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \qquad (5)$$

Мұндағы, $A = \left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right)$ - тұрақты матрица, ал $g(x)$ функциясы (3) теңсіздікті қанағаттандырады. Өткен параграфта көрсетілгендей, кейбір T - матрицасы арқылы A матрицасын диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Ол үшін $x = Ty$ алмастыруын жасасақ, жүйе мына түрге келеді:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y + h(y) \qquad (6)$$

Мұнда Λ- диагоналды матрица, $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі шектелген: $|b_{ij}| \le \varepsilon$, ал $h(y) = T^{-1}g(Ty)$.

Ляпунов функциясы үшін сол алдыңғы параграфта көрсетілген функцияны алайық:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = (y, \bar{y}) \qquad (7)$$

Бұл функция анықталған оң таңбалы. Енді осы функцияның (6) жүйе бойынша алынған туындысын есептейік:

$$\dot{V}(y) = \frac{d}{dt}\left(y, \bar{y}\right) = \left(\frac{dy}{dt}, \bar{y}\right) + \left(y, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) =$$
$$= \left[\left((\Lambda + B_\varepsilon)y, \bar{y}\right) + \left(y, (\overline{\Lambda} + \overline{B_\varepsilon})\bar{y}\right)\right] + \left[\left(h(y), \bar{y}\right) + \left(y, \overline{h(y)}\right)\right] \equiv A_1 + A_2 \tag{8}$$

Мұнда A_1 және A_2 сәйкес бірінші және екінші квадрат жақшалардың ішіндегі өрнектерді білдіреді. Осындағы A_1 қосындысы сызықты

$$\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda + B_\varepsilon\right)y \tag{9}$$

жүйе бойынша алынған туындыны білдіреді. Сондықтан §3 параграфтағы теорема-5 бойынша (онда $\dot{V}(y) \le -\alpha V(y)$) деп көрсетілген):

$$A_1 \le -\gamma\|x\|^2, \gamma > 0 \tag{10}$$

Осы сияқты

$$\|y\| = \left\|T^{-1}x\right\| \le C_1\|x\|,$$
$$\|h(y)\| = \left\|T^{-1}g(Ty)\right\| \le C_2\|g(x)\| \le C_2C_3\|x\|^2$$

Осыдан

$$\|A_2\| \le 2\|y\|\,\|h(y)\| \le C\|x\|^3 \tag{11}$$

мұндағы $C = 2C_2C_3$.

Сондықтан,

$$\dot{V}(x) \equiv A_1 + A_2 \le -\|x\|^2\left(\gamma - C\|x\|\right) \tag{12}$$

Егер кейбір $U_1 \subset U$ аймағында $\|x\| \le \frac{\gamma}{2}C$ деп алсақ, онда

$$\dot{V}(x) \le -\frac{\gamma}{2}\|x\|^2, \forall x \in U_1 \tag{13}$$

яғни U_1 облысында $\dot{V}(x)$ функциясы анықталған теріс таңбалы мән қабылдайды және

$$\dot{V}(x) \le -\alpha V(x), \forall x \in U_1 \tag{14}$$

мұндағы $\alpha > 0$. Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып $x = 0$ асимптотикалы орнықты. (14) теңсіздіктен (5) шарты оңай шығады (§3).

Теорема-2. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, λ_n меншікті санының нақты бөлігі оң болсын: $\mathrm{Re}\lambda_n > 0$. Бұл жағдайда A матрицасына T түрлендіруін пайдаланып, оны төменгі үшбұрышты диагоналды түрге келтірсек, соңғы теңдеу

$$\frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n + h_n(y) \tag{15}$$

түрінде жазылады. Осы теңдеу үшін Четаев функциясын мына түрде алайық:

$$V(x) = |y_n|^2 = \left(y_n, \overline{y_n}\right) \tag{16}$$

Осы функцияның (15) теңдеу бойынша туындысын есептейік:

$$\dot{V}(x)=\left(\frac{dy_n}{dt},\overline{y_n}\right)+\left(y_n,\frac{d\overline{y_n}}{dt}\right)=\left(\lambda_n y_n+h_n(y),\overline{y_n}\right)+$$
$$+\left(y_n,\bar{\lambda}_n\bar{y}_n+\bar{h}_n(\bar{y})\right)=2\operatorname{Re}\lambda_n(y_n,\overline{y_n})+h(y)=2\operatorname{Re}\lambda_n|y_n|^2+h(y)$$
мұндағы, $\|h\|\le C\|y\|^3$.

Соңғы теңдіктен
$$\dot{V}(x)\ge 2\operatorname{Re}\lambda_n|y_n|^2-C\|y\|^3 \tag{17}$$
теңсіздігін аламыз. Осы (16) және (17) қатынастардан $x=0$ нүктесінің кейбір аймағында $V(x)>0$ және $\dot{V}(x)>0$ болатынын көреміз. Мысалы, $y_1=0, y_2=0,..., y_{n-1}=0, y_n\ne 0$ нүктесінде $V(x)$ және $\dot{V}(x)$ функциялары анықталған оң таңбалы. Сондықтан, U_1 аймағы үшін $y_n\ne 0$ облысын алсақ, жеткілікті. Егер $|y_n|$ жеткілікті аз шама болса, онда $U_1\subset U$ және оның ішкі шекарасында $x=0$ нүктесі жатыр. Четаев теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Теорема-3. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреулерінің нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (5) жүйедегі $g(x)$ функциясының берілуіне қарай теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да бола алады.Мұндай жағдайларды ерекше жағдайлар деп атайды. Олар туралы мағлұматтарды арнаулы [8] кітабынан алуға болады.